赋范向量空间下的加权费马点推广

刘诗昆

指导老师：顾冬磊

摘要：

著名经济学家韦伯说过，影响公司经济收益的最重要的三个条件是，它所处的位置，所处的位置和所处的位置。本文从经典的几何问题费马点进行加权，并将其推广至 Lp 空间，使其纯数学问题更具有实际意义，比较好的解决了韦伯工业区位论提出的猜想和其他实际应用。

不同维度的向量空间统称为赋范向量空间。笔者先从一阶范数，这种特殊的赋范向量空间开始讨论，步步深入，最后用 Lp 空间的通解方法，概括全文，并相应作出了计算机程序。

关键词： 加权费马点，Lp 空间，赋范向量空间

目 录

第一章 最佳布局问题与距离方程 …… 3
1.1 距离的特征 …… 3
1.2 范数的引出 …… 3
1.3 广义加权费马点 …… 3

第二章 一阶范数中的费马点（曼哈顿距离）…… 3
2.1 曼哈顿距离的定义 …… 3
2.2 加权费马点的布局 …… 4
2.3 一阶范数中的费马点的几何作法 …… 4

第三章 二阶范数中的费马点(欧几里得距离)…… 5
3.1 欧式几何中的费马点定义 …… 5
3.2 利用初等几何来求费马点 …… 5
3.2.1 三角形中的费马点 …… 5
3.2.2 四边形中的费马点 …… 6
3.3 利用” N 孔系统”追踪费马点 …… 7
3.3.1 ”N 孔系统”的定义 …… 7
3.4 迭代算法的引出 …… 8

第四章 无穷阶范数中的费马点(切比雪夫距离) …… 9
4.1 切比雪夫距离的定义 …… 9

第五章 p 阶范数中的费马点 …… 10
5.1 赋范空间下的范数的定义 …… 10
5.2 费马点在赋范向量空间下的通解 …… 10

总结 …… 12

参考文献 …… 12

第一章　最佳布局问题与距离方程

1.1 距离的特征

在$\mathbb{R}^n$空间中，定义两个点 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 则相应的距离 $d(X,Y)$ 具有以下特征:[1]

$d(X,Y)\ge 0$ 非负性

$d(X,Y)=0 \Leftrightarrow X=Y$　同一性

$d(X,Y)=d(Y,X)$　对称性

$d(X,Y)\le d(X,Z)+d(Z,Y)$ 三角不等式

1.2 范数的引出

在欧几里得$\mathbb{R}^n$空间中，两个点之间的距离被称之为欧几里得距离(二阶范数)，当然不同范数可作为其他距离的表示方法。若在向量空间定义了范数，则称之为赋范向量空间，这在第五章中会有详细介绍。

赋范向量空间中定义两个点 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ ，则其距离方程为

$$L_p(X,Y)=\|X-Y\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$$

上述这个式子被称为L_p范数，并满足上述距离的四个特征，其中三角不等式的证明是不平凡的，其结论被称之为闵可夫斯基不等式。[2]

不同范数下的单位圆可有如下图 1 表示，(p 表示不同范数)

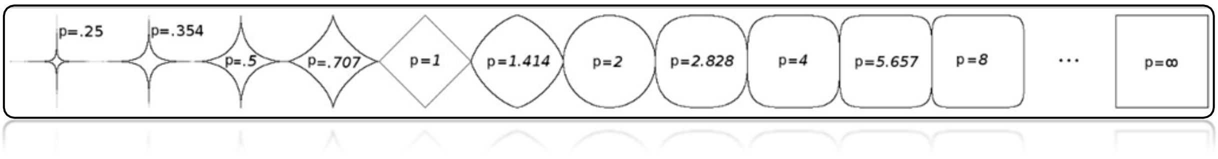

图 1

1.3 广义加权费马点

在欧几里得空间中定义一个点，使其到点集中的所有点的距离之和最短。则这个点被称之为广义费马点，最初费马点的定义是由法国数学家费马在一封信中提出的，这里的广义加权费马点是最初费马点定义或是广义费马点的更深层次推广。

在赋范向量$\mathbb{R}^2$空间上，定义广义加权费马点为 $P=(x,y)$,点集 $N_i=(x_i,y_i)$, k_i为相应的权数，$i=1,2,\cdots,n$

那么则应满足：

$$P(x,y)=\sum_{i=1}^{n}k_i(|x_i-x|^p+|y_i-y|^p)^{1/p}=min$$

第二章 一阶范数中的广义费马点 （曼哈顿距离）

2.1 曼哈顿距离的定义

曼哈顿距离的构造比欧式几何更接近生活，且更来得容易诠释这世界中的城市问题，基于城市为网络布局构造。在一阶范数的时候，其距离就为曼哈顿距离。

此时的距离的方程可写成：

$$L_1(X,Y) = \|X-Y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i|x_i - y_i|$$

2.2 加权费马点的布局

由广义加权费马点的定义，建立二元目标函数，

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} k_i\,(|x_i - x| + |y_i - y|) = \sum_{i=1}^{n} k_i\,|x_i - x| + \sum_{i=1}^{n} k_i\,|y_i - y|$$

先让点集中的加权横坐标数列与纵坐标数列按前后大小重新排列，构成新数列 x_j, y_j ,其中 k_j ，为相应的权值，$j = 1, 2,\cdots, n,$

定义，

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{n} k_j\,\left|x_j - x\right| \text{，} f_2(y) = \sum_{j=1}^{n} k_j\,\left|y_j - y\right|$$

当$f_1(x), f_2(y)$ 同时取到最小值时，$P = (x,y)$ 即为此时的加权费马点，其必满足$f_1(x), f_2(y)$ 的导数为零或不可导。

观察到函数$f_1(x), f_2(y)$中，当$x \neq x_j$, $y \neq y_j$,$j = 1, 2,\cdots, n$时，$f_1(x), f_2(y)$是可导的。

则令$x_p < x < x_{p+1}$ ，$y_{p'} < y < y_{p'+1}$, $p, p' = 1, 2,\cdots, n-1$,则函数$f_1(x), f_2(y)$ 可转化为：

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{p} k_j\,\left|x_j - x\right| + \sum_{j=p+1}^{n} k_j\,\left|x - x_j\right|, \qquad f_2(y) = \sum_{j=1}^{p'} k_j\,\left|y_j - y\right| + \sum_{j=p'+1}^{n} k_j\,\left|y - y_j\right|$$

那么，

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \sum_{j=1}^{p} k_j - \sum_{j=p+1}^{n} k_i\,, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \sum_{j=1}^{p'} k_j - \sum_{j=p'+1}^{n} k_j$$

因此，当 $x_p < x < x_{p+1}, y_{p'} < y < y_{p'+1}$时，$P(x,y)$为最佳点其满足条件$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$。

又观察到，函数$f_1(x), f_2(y)$ 分别在点x_i ，y_i ，$i = 1, 2,\cdots, n$ 时不可导。

则最优点为 $(x_p, y_{p'})$ 同时满足，

$$\frac{\partial {f_1}^-}{\partial x} = \sum_{j=1}^{p-1} k_j - \sum_{j=p}^{n} k_j \le 0, \qquad \frac{\partial {f_1}^+}{\partial x} = \sum_{j=1}^{p} k_j - \sum_{j=p+1}^{n} k_j \ge 0,$$

$$\frac{\partial {f_2}^-}{\partial y} = \sum_{j=1}^{p'-1} k_j - \sum_{j=p'}^{n} k_j \le 0, \qquad \frac{\partial {f_2}^+}{\partial y} = \sum_{j=1}^{p'} k_j - \sum_{j=p'+1}^{n} k_j \ge 0,$$

2.3 一阶范数中的费马点的几何作法

根据引理 2.2.1 我们可以在点集 $N_i = (x_i, y_i)$, $i = 1,2,\cdots, n$中先分别计算其横坐标数列与纵坐标数列的权值的总和的一半，将权值按升序排列后，从第一个权值开始一步一步进行累加，直到超过其总和的一半。将超过权值一半对应的横（纵）数引数轴垂线，那么其交点即为加权费马点。当累加的权值正好等于其总和的一半时，此时加权费马点有无穷个。因此，一阶范数下的费马点不唯一。

其两种情况可由下图表示：

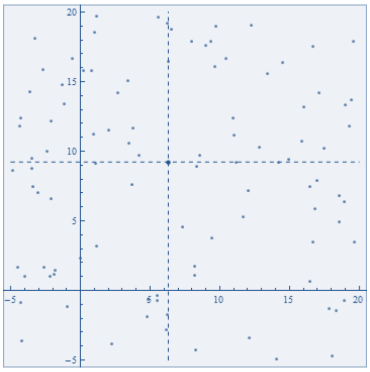

图 2

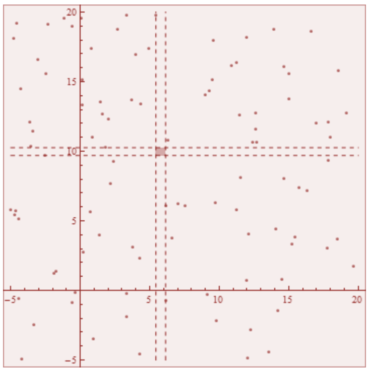

图 3

第三章 二阶范数中的费马点（欧几里得距离）

3.1 欧几里得距离中的费马点定义

欧几里得距离是费马点的雏形，也是我们最为熟悉的一个空间。但这里的广义加权费马点比一阶范数中的费马点难求的多。在欧几里得空间中，其距离方程为，

$$L_2(X,Y) = \|X-Y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i|x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$$

3.2 利用初等几何来求费马点

基于费马点的定义是三角形中的一点，利用几何证明是一般问题下手中最容易想到的一点，先不妨令所有权数为一。连接点集中的各点，使其成为封闭的几何图形，则目标改为在平面内找到一点使其到图形的顶点之和最小。

3.2.1 三角形中的费马点

A. 构造三角形ΔABC使其任意一个角都小于$120°$

由于三角形是费马点最原始的状态，所以证明起来并不很困难。

如图 4，在ΔABC中作 AB 边的等边三角形ΔABD，构造一个圆使其过等边三角形的三个顶点，连接 CD 和圆的交点记为费马点 P。

对于任意一点 P' 根据托勒密不等式，得到 $AD \cdot BP' + BD \cdot AP' \geq DP' \cdot AB$,

$$\because AB = AD = BD \Longrightarrow BP' + AP' \geq DP', \Leftrightarrow BP' + AP' + CP' \geq DP' + CP' \geq CD$$

（当且仅当A, B, D, P四点共圆时，且 P 在线段 CD上时等号成立）

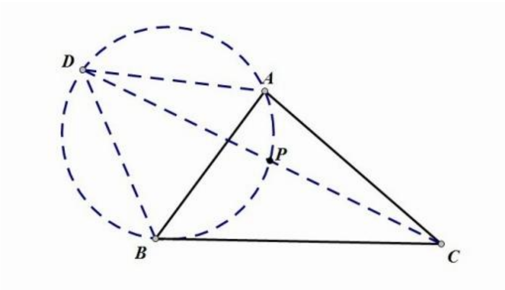

图 4

B. 构造三角形ΔABC使其有一个角大于$120°$

在三角形内部取一点P'，连接AP'，BP'，CP'。以AP'为边，作等边三角形 $\Delta AP'M$，以AB为边，作等边三角形ABN，连接NM，延长线段NA至CM上点K，如图 5。

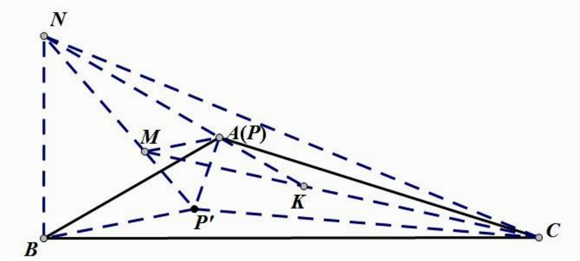

图 5

那么由条件可知，易证明$\Delta ABP' \cong \Delta ANM(S.A.S.)$。又$AP' = MP'$，同样的得到 $BP' = MN$。

要使$P'A + P'B + P'C$最小，则转化为 $MN + NP' + P'C$ 最小。

而由三角形不等式可知，

$$MP' + P'C > MC,\ NM + MK > AN + AK,\ AK + KC > AC$$

联立上式中 3 个不等式得到，

$$NM + MC > AN + AC \iff NM + MP' + P'C > AN + AC\ ,$$

所以当且仅当 P' 在 A 点时 $MN + MP' + P'C$ 的值最小(当点 P' 在三角形形外的时候，结论显然，在此不作证明）。

所以，此时情况中的费马点为钝角点。

3.2.2 四边形中的费马点

A．当四边形为凸四边形

此时的费马点相当好找，即为两条对角线的交点。若不是，则会与 4 个顶点的连线所构成两个三角形，如图 6，则根据基本三角不等式，必有

$$P'B + P'D > BD, \qquad P'A + P'C > AC$$

所以，当且仅当 P 点在 AC 于 BD 的交点时，使得可使得 $AP + BP + CP + DP$最小。

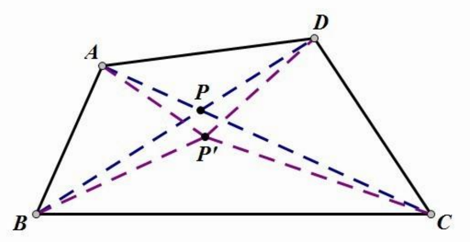

图 6

B．当四边形为凹四边形

随着点的增加，费马点的构造难度也逐渐开始增大。笔者在此用编程穷举观察，发现费马点正好落在其凹点上。证明如下。

I. 当点 P' 在凹四边形形外时，延长 AD 至 BP' 上点 K，连接 AP', BP', CP', DP', BD，如图 7 所示。由基本三角形不等式可知，$AP' + KP' > AD + DK$，$DK + BK > BD$

联立上式中两个不等式可得，$AP' + BP' > AD + BD$, 又 $DP' + P'C > CD$

所以$AP' + BP' + CP' + DP' > AD + BD + CD$。即排除了费马点在凹四边形外的可能性。

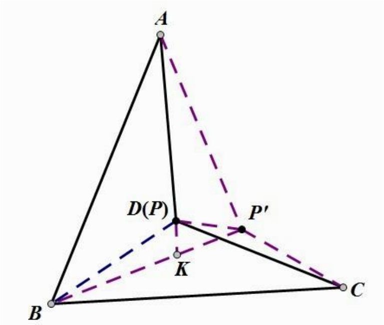

图 7

Ⅱ. 当点 P' 在凹四边形形内时，连接 BD, CP', BP', AP', AC，延长 AD 至 CP'上点 K。
如同 I 中所证的，同样利用三角形不等式，得到 $AP' + CP' > AD + CD$, 又 $BP' + DP' > BD$。
所以$AP' + BP' + CP' + DP' > AD + BD + CD$。则也排除了费马点在凹四边形内的可能性。

综上所述，在凹四边形中，凹点即为此时的费马点。

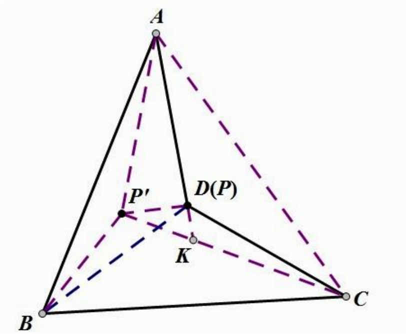

图 8

3.3．利用" N 孔系统"追踪费马点

3.3.1 "N 孔系统"的定义

当用几何直接证明法将费马点拓展为五边形,甚至边数更多时 ,笔者发现这种情况下用几何方法非常繁琐。后查阅资料后发现还可用物理方法来构造。这里引入“N 孔系统”[3]，N 孔系统满足以下几个条件：

1. 在桌面上有n个大小相同的小圆孔.

2、取n条适当长度的细绳，分别穿过小圆孔，并将此 n条绳子置于桌面上的部分连接于点P，绳子的另一端各挂不同重量（可理解为权值）的物体。

3、实验中，所有涉及到的摩擦力不计。

4、绳子的重力不计。

引理 3.3.2：" N 孔系统"的最小势能点即为 N 边形的费马点。（ $N \geq 2$ ）

令所有的点所处的桌面高度为h, 从P点通过 N_i孔至悬挂重物处的绳长为$l_i(i = 1,2,\dots,n)$，其对应的重物为$M_i(i = 1,2,\dots,n)$克，如图9。将n条绳子连接使得存在一个可活动的P点，将P点移往桌面上一点另一点P'，则此时N点系统的总势能为：

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} M_i g[h - (l_i - P'N_i)] = \sum_{i=1}^{n} M_i g(h - l_i) + \sum_{i=1}^{n} M_i g(P'N_i)$$

当 P' 点最终移动到点 P, 其最小势能点位置时， N 点系统的 Ep 最小，而由已知条件可知 $\sum_{i=1}^{n} M_i g(h-l_i)$为定值。因此得到 $\sum_{i=1}^{n} P'N_i$ 为最小值，故原命题得证。

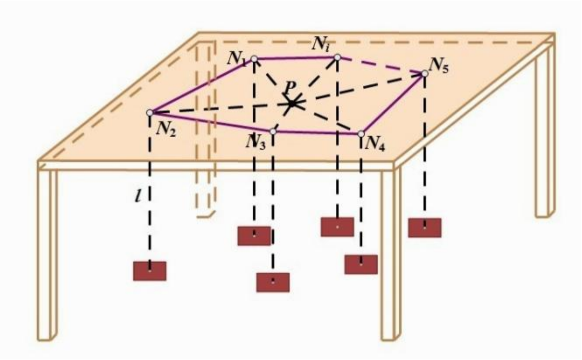

图 9

引理 3.3.3："N 孔系统"中的最小势能点唯一

假设在 N 孔系统中存在 P'点同样为系统中的最小势能点，由力的平衡性质得到，

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PN_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P'N_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{PN_i} - \overrightarrow{P'N_i}\right) = \vec{0}$$

$$\therefore P = P'$$

即原命题得证。

3.4 迭代算法的引出

根据 N 孔系统的定义 ,若将每根绳子上受的力看成向量 ,在 N 孔系统上的平面建立笛卡尔坐标系，令 N_i=(x_i, y_i)为孔的坐标, 则 P 点所受到的合力 R_p 为，

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{\overrightarrow{PN_i}}{\left|\overrightarrow{PN_i}\right|} = \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{N_i - P}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}}$$

由引理 3.3.2 可知，系统中加权费马点合力为零，因此当 R_p=0 时，我们可以将式子化为，

$$\sum_{i=1}^{n} K_i \frac{N_i - P}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{N_i}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} - \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{P}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} = 0$$

因此我们得到，

$$P = \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{N_i}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} \Big/ \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{1}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}}$$

即为迭代函数：

$$T(p) = \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{N_i}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} \Big/ \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{1}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}}$$

其收敛性有 *Kuhn* 在 1973 年证明。[4]

不妨，可令迭代的起始点为：

$$P_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} K_i N_i\right) / \sum_{i=1}^{n} K_i$$

此时的P_0为 N 孔系统的重心。

第四章 无穷阶范数中的费马点（切比雪夫距离）

4.1 切比雪夫距离的定义

切比雪夫距离是范数为∞时的距离，此时距离方程为，

$$L_\infty(X,Y) = \|X-Y\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$$

由图 1 可猜测，解决无穷阶范数中费马点可将无穷阶范数转变成一阶范数的情形，定义一个变化矩阵 T，那么 T 则满足：

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\,45° & -sin\,45° \\ +sin\,45° & cos\,45° \end{bmatrix}$$

引理 4.2 $\boldsymbol{L_\infty(N_i, P) = L_1(T(N_i), T(P))}$

$$L_1\big(T(N),T(P)\big) = \frac{\sqrt{2}}{2}|x_i\,cos\,45° + y_i\,sin\,45° - x\,cos\,45° - y\,sin\,45°|$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{2}|-x_i\,sin\,45° + y_i\,cos\,45° + x\,sin\,45° - y\,cos\,45°|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} max\{(x_i\,cos\,45° + y_i\,sin\,45° - x\,cos\,45° - y\,sin\,45° - x_i\,sin\,45° + y_i\,cos\,45° + x\,sin\,45°$$
$$- y\,cos\,45°), (x_i\,cos\,45° + y_i\,sin\,45° - x\,sin\,45° - y\,cos\,45° + x_i\,sin\,45°$$
$$- y_i\,cos\,45° - x\,sin\,45° + y\,cos\,45°), (-x_i\,cos\,45° - y_i\,sin\,45° + x\,sin\,45°$$
$$+ y\,cos\,45° - x_i\,sin\,45° + y_i\,cos\,45° + x\,sin\,45° - y\,cos\,45°), (-x_i\,cos\,45° - y_i\,sin\,45°$$
$$+ x\,sin\,45° + y\,cos\,45° + x_i\,sin\,45° - y_i\,cos\,45° - x\,sin\,45° + y\,cos\,45°)\}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} max\,\{\frac{1}{\sqrt{2}} max\{(y_i - y + y_i - y), (x_i - x + x_i - x), (-x_i + x - x_i + x), (-y_i + y + x_i + y)\}$$
$$= max\,\{|x_i - x|, |y_i - y|\}$$

原命题得证。

因此，切比雪夫距离中的费马点可由曼哈顿距离中的费马点转化，解法可参照引理 2.2.1，这里不再多作证明。

第五章 范数为 p 中的费马点

5.1 赋范空间下的范数的定义

如前文所示，赋范向量空间也可称为 Lp 空间是前面几种的通式，在赋范向量空间下，定义的范数必有以下几点特征：[5]

1.正值性：当$x \neq 0, \|x\| > 0;$ 2.正值齐次性：$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

3.三角不等式：$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 4.正定性：$\|x\| = 0$，当且仅当 $\vec{x} = 0$

5.2 费马点在赋范向量空间下的通解

当 p=1, 2, ∞时，作为赋范向量空间下的特殊情况，可由上文的特定方法解决。对于非特殊情况，我们可以从$P \in (0,1)$和$P \in (1, +\infty)$两种情况开始讨论，

A. 当$\boldsymbol{P} \in (\mathbf{1}, +\infty)$时

此时函数处处可导，且为凸函数。

证明：令函数中点$X, Y, M \in \mathbb{R}^n$,且$t \in (0,1)$，由闵可夫斯基不等式有，

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$$

那么得到：

$$\begin{aligned}&\|t(X - M) + (1 - t)(Y - M)\|^p \\ &\quad \leq \|t(X - M)\|^p + 2\|t(X - M)\| \cdot \|(1 - t)(Y - M)\| + \|(1 - t)(Y - M)\|^p \\ &\quad = (t\|X - M\| + (1 - t)\|Y - M\|)^p\end{aligned}$$

而X, Y, M非共线，因此，

$$f(tX + (1 - t)Y) < tf(X) + (1 - t)f(Y)$$

即原命题得证。

根据凸函数的性质，对于$\mathbb{R}^2$空间上,$P = (x, y)$,其对于x, y的偏导数为零的点就为函数的最小值，由

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} k_i [(|x_i - x|^p + |y_i - y|^p)]^{1/p}, p > 1$$

分别对x, y求其偏导，得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} k_i |x_i - x|^{p-1} (|x_i - x|^p + |y_i - y|^p)^{1/p-1} \frac{\sqrt{(x_i - x)^2}}{x_i - x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} k_i |y_i - y|^{p-1} (|x_i - x|^p + |y_i - y|^p)^{1/p-1} \frac{\sqrt{(y_i - y)^2}}{y_i - y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} k_i (x_i - x) (|x_i - x|^p + |y_i - y|^p)^{1/p-1} [(x_i - x)^2]^{p/2-1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} k_i (y_i - y) (|x_i - x|^p + |y_i - y|^p)^{1/p-1} [(y_i - y)^2]^{p/2-1}$$

由$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$，当$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$，$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ 同时成立时，函数取得最小值，

因此，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}k_i(x_i-x)\left(|x_i-x|^p+|y_i-y|^p\right)^{1/p-1}[(x_i-x)^2]^{p/2-1}=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\left(|x_i-x|^p+|y_i-y|^p\right)^{1/p-1}[(x_i-x)^2]^{p/2-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}k_ix\left(|x_i-x|^p+|y_i-y|^p\right)^{1/p-1}[(x_i-x)^2]^{p/2-1}$$

$$\Leftrightarrow x_{t+1}=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\left(|x_i-x_t|^p+|y_i-y_t|^p\right)^{1/p-1}[(x_i-x_t)^2]^{p/2-1}$$

$$/\sum_{i=1}^{n}k_i\left(|x_i-x_t|^p+|y_i-y_t|^p\right)^{1/p-1}[(x_i-x_t)^2]^{p/2-1}\text{，}p>1$$

$$y_{t+1}=\sum_{i=1}^{n}k_iy_i\left(|x_i-x_t|^p+|y_i-y_t|^p\right)^{1/p-1}[(y_i-y_t)^2]^{p/2-1}$$

$$/\sum_{i=1}^{n}k_i\left(|x_i-x_t|^p+|y_i-y_t|^p\right)^{1/p-1}[(y_i-y_t)^2]^{p/2-1}\text{，}p>1$$

同样的，可令其起始点为：

$$P_0=\sum_{i=1}^{n}K_i\,N_i/\sum_{i=1}^{n}K_i$$

其收敛性由计算机验证。

B. 当$P\in(0,1)$时

当 $0<P<1$时，Aoki-Rolewics 定理论述了这时的范数被称之为拟范数，且不满足三角不等式，如果一个拟范数在向量空间上定义了可度量的拓扑值，那么这个空间被称之为拟巴纳赫空间。

所以，他不满足距离的性质，也所以没有讨论价值了。.[6],[7]

这时的$f(x,y)$图像如图所示：

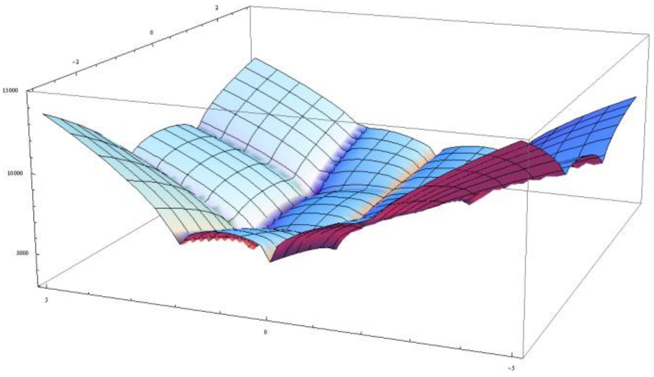

图 10

总结：

本文基本解决了不同范数下最优费马点问题，在一或二阶范数时，为日常生活中普遍遇到的情况，其他范数可为实际问题中更为苛刻环境中的问题。

其中，上文论述的广义加权费马点都是在$\mathbb{R}^2$空间上的，其推广至$\mathbb{R}^n$空间证明类同，笔者没有直接在$\mathbb{R}^n$空间上作论述的仅仅是因为这样论述过于繁琐，而$\mathbb{R}^2$空间更贴近实际生活，且容易被人们接受。(而无穷阶情况是个例外，基于在高纬度中旋转需要考虑沿不同的轴或者不同的角度都是很复杂的。)

并且上文提到的两个迭代方程在计算机编程中效果都非常出色，在可一秒钟内解决任意的一百个点中的最优点且精度达到六，七位有效数字，或是更多。较可惜的是这里的迭代方程的收敛证明都依赖于计算机，而没有严格的数学理论证明。且实际问题中最优点的求法可能还存在其他不同因素，比如障碍物，或存在坡度之类的。因此，笔者会在未来研究中会不断优化且满足更为复杂的最优点分布问题。

参考文献：

[1] Reza Zanjirani Farahani•Masoud Hekmatfar *Facility Location Concepts, Models, Algorithmsand Case Studies*

[2] M.I. Voitsekhovskii, "Minkowski inequality", in *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer

[3] Z.Drezner and H.W. Hamacher editors *Facility Location: Applications and Theory*

[4] Kuhn, H.W. (1973): A note on Fermat's problem. Math. Program. **4**, 98–107

[5] Eduard Prugovecki "Quantum mechanics in Hilbert Space" *2.2. The Concept of Norm*

[6] Mohammad Sal Moslehian, "Schatten p-Norm Inequalities related to an extended operator parallelogram law"

[7] Cong wu And Yongjin Li "On The Triangle Inequality In Quasi-Banach Spaces"